

CHAPITRE 1

Fonctions affines

1 Définitions

Définition 1 : fonction affine, fonction linéaire

Une **fonction affine** f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont deux nombres réels fixés.

Lorsque $b = 0$, la fonction définie par $f(x) = ax$ est appelée **fonction linéaire**.

Exemple

$f(x) = -x + 6$: f est affine, non linéaire, avec $a = -1$ et $b = 6$.

$g(x) = -\frac{2}{3}x$: g est linéaire, donc affine, avec $a = -\frac{2}{3}$ et $b = 0$.

$h(x) = 4(x - 2) + 3 = 4x - 8 + 3 = 4x - 5$: h est affine, non linéaire, avec $a = 4$ et $b = -5$.

2 Sens de variation

Propriété 1 : sens de variation

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Exemple

$f(x) = \frac{x}{4} - 1 = \frac{1}{4}x - 1$: $a = \frac{1}{4} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$g(x) = -3 = 0 \times x - 3$: $a = 0$, donc g est constante sur $\mathbb{R}$.

Capacité 1 : Déterminer les variations d'une fonction affine

Déterminer les variations des fonctions affines suivantes.

1. $f(x) = 3x + 2$

2. $g(x) = 7 - 6x$

3. $h(x) = -x$

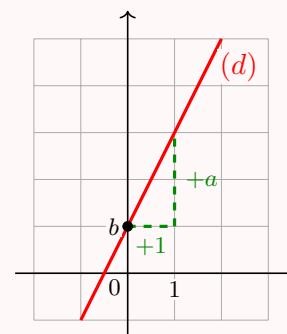
3 Représentation graphique

Propriété 2 : représentation graphique

Une fonction affine est représentée par une **droite**.
Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'**origine** du repère.

Pour $f(x) = ax + b$:

- a est le **coefficient directeur** : si l'on avance de 1, on monte de a ;
- b est l'**ordonnée à l'origine** : elle se lit sur l'axe des ordonnées.

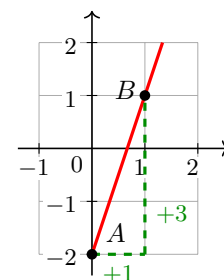


Méthode : tracer la droite représentant une fonction affine

On place le point de coordonnées $(0; b)$, puis, à partir de ce point, on avance de 1 et on monte de a (on descend si $a < 0$) pour obtenir un second point ; on trace la droite passant par ces deux points. Pour $f(x) = -3x + 2$: on part de $(0; 2)$, on avance de 1 et on descend de 3, donc la droite passe par $(1; -1)$.

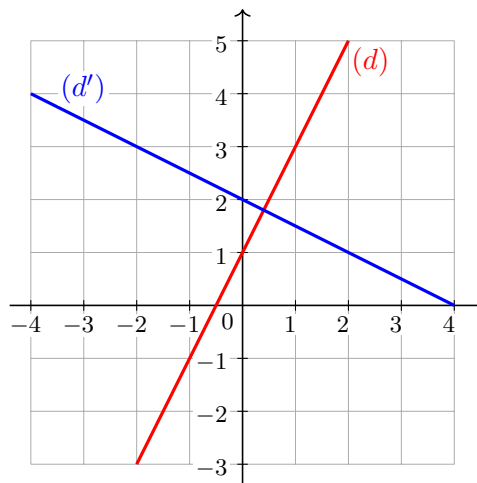
Exemple

Droite représentant la fonction $f : x \mapsto 3x - 2$:
elle passe par $A(0; -2)$, car $b = -2$,
et par $B(1; 1)$, car $a = 3$ (on avance de 1, on monte de 3).



Capacité 2 : Déterminer graphiquement l'expression d'une fonction affine

Déterminer l'expression des fonctions f et g représentées ci-dessous respectivement par les droites (d) et (d') .



4 Taux d'accroissement

Propriété 3 : taux d'accroissement

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, et soient u et v deux réels distincts. Le quotient $\frac{f(v) - f(u)}{v - u}$ est le **taux d'accroissement** de f entre u et v ; il est constant et égal au coefficient directeur :

$$a = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

Démonstration

$f(v) - f(u) = (av + b) - (au + b) = a(v - u)$, et $v - u \neq 0$: on divise par $v - u$. ■

Remarque Échanger u et v ne change rien, car $\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$: le numérateur et le dénominateur changent tous les deux de signe.

Méthode : déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de deux valeurs

On connaît $f(u)$ et $f(v)$, avec $u \neq v$. On calcule d'abord $a = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$, puis on remplace x par u dans $f(x) = ax + b$: l'égalité $au + b = f(u)$ donne b .

Exemple

Fonction affine f telle que $f(1) = 2$ et $f(3) = -6$: $f(x) = ax + b$, avec

$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-6 - 2}{3 - 1} = \frac{-8}{2} = -4;$$

$f(1) = 2$, soit $-4 \times 1 + b = 2$, d'où $b = 6$.

Ainsi $f(x) = -4x + 6$.

Capacité 3 : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Déterminer par le calcul une expression de la fonction affine f telle que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

5 Croissance linéaire

Définition 2 : croissance linéaire

Une grandeur y qui dépend d'une grandeur x suit un modèle de **croissance linéaire** lorsque y varie de la même quantité chaque fois que x augmente d'une unité. Elle est alors modélisée par une fonction affine $f(x) = ax + b$:

- a est la variation de y lorsque x augmente de 1 ;
- b est la valeur de y pour $x = 0$, c'est la valeur initiale.

Méthode : résoudre un problème de seuil

Pour savoir à partir de quelle valeur de x la grandeur $f(x)$ atteint ou dépasse un seuil s , ou devient plus grande qu'une autre grandeur $g(x)$, on résout l'inéquation $f(x) \geq s$, ou $f(x) > g(x)$. On interprète ensuite la solution : lorsqu'elle est de la forme $x \geq k$ ou $x > k$ et que x est un nombre entier (de trajets, d'objets...), on retient le plus petit entier qui convient. Diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

Exemple

Une cuve contient 40 litres et se remplit de 8 litres par minute : c'est une croissance linéaire, et le volume d'eau, en litres, après x minutes est $f(x) = 8x + 40$.

Elle contient au moins 200 litres lorsque $f(x) \geq 200$:

$$8x + 40 \geq 200 \iff 8x + 40 - 40 \geq 200 - 40$$

$$\iff \frac{8x}{8} \geq \frac{160}{8}$$

$$\iff x \geq 20$$

donc à partir de 20 minutes.

Capacité 4 : Modéliser une croissance linéaire par une fonction affine

Un abonnement de train coûte 60 euros à l'achat, puis chaque trajet revient à 12 euros. On note $f(x)$ la dépense totale, en euros, pour x trajets.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x , puis préciser le sens de variation de f .
2. Sans abonnement, un trajet coûte 27 euros. On note $g(x)$ la dépense totale sans abonnement. Exprimer $g(x)$ en fonction de x .
3. À partir de combien de trajets l'abonnement devient-il avantageux ?