

En groupe : tester, conjecturer une règle, la démontrer avec le calcul littéral, puis rédiger la démonstration au propre.

On observe : $23 \times 27 = 621$, $41 \times 49 = 2009$, $62 \times 68 = 4216$.

1. Vérifier ces trois produits. Qu'ont en commun les deux facteurs de chaque produit ? Trouver une règle qui permet d'écrire le résultat directement, puis la tester sur d'autres exemples du même type.
2. On note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités du premier facteur. Écrire les deux facteurs en fonction de a et b , développer leur produit et l'écrire sous la forme $100 \times (\dots) + (\dots)$.
3. Justifier la règle, puis calculer mentalement 74×76 et 91×99 .
4. Pour aller plus loin : la règle s'applique-t-elle à 123×127 ? Adapter la démonstration.

Correction

1. On vérifie chaque produit avec la distributivité, en écrivant le second facteur comme une somme ou une différence simple : $27 = 20 + 7$, $49 = 50 - 1$, $68 = 70 - 2$.

$$\begin{array}{lll} 23 \times 27 = 23 \times 20 + 23 \times 7 & 41 \times 49 = 41 \times 50 - 41 \times 1 & 62 \times 68 = 62 \times 70 - 62 \times 2 \\ = 460 + 161 & = 2050 - 41 & = 4340 - 124 \\ = 621 & = 2009 & = 4216 \end{array}$$

Dans chaque produit, les chiffres des dizaines des deux facteurs sont égaux et leurs chiffres des unités ont pour somme $3 + 7 = 1 + 9 = 2 + 8 = 10$.

Point commun : même chiffre des dizaines, chiffres des unités de somme 10.

Règle : on multiplie le chiffre des dizaines par l'entier qui le suit, puis on écrit à sa droite le produit des deux chiffres des unités, sur deux chiffres.

- $23 \times 27 : 2 \times 3 = 6$ et $3 \times 7 = 21$, d'où 621 ;
- $41 \times 49 : 4 \times 5 = 20$ et $1 \times 9 = 9$, écrit 09, d'où 2009 ;
- $62 \times 68 : 6 \times 7 = 42$ et $2 \times 8 = 16$, d'où 4216 ;
- test sur $34 \times 36 : 3 \times 4 = 12$ et $4 \times 6 = 24$, la règle annonce 1 224 ; on vérifie :

$$\begin{aligned} 34 \times 36 &= 34 \times 30 + 34 \times 6 \\ &= 1020 + 204 \\ &= 1224 \end{aligned}$$

2. Un nombre de deux chiffres vaut $10 \times (\text{chiffre des dizaines}) + (\text{chiffre des unités})$: ainsi $23 = 10 \times 2 + 3$. Le premier facteur est donc $10a + b$. Le second a le même chiffre des dizaines a et pour chiffre des unités $10 - b$: il vaut $10a + 10 - b$. On note P leur produit et on le développe par double distributivité (trois termes dans la seconde parenthèse, donc six produits) ; les termes $-10ab$ et $10ab$ s'annulent. Enfin, on regroupe les termes multipliés par 100 et on factorise $a^2 + a = a(a + 1)$ et $10b - b^2 = b(10 - b)$.

$$\begin{aligned} P &= (10a + b)(10a + 10 - b) \\ &= 10a \times 10a + 10a \times 10 + 10a \times (-b) + b \times 10a + b \times 10 + b \times (-b) \\ &= 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2 \\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2 \\ &= 100 \times (a^2 + a) + (10b - b^2) \\ &= \boxed{100 \times a(a + 1) + b(10 - b)} \end{aligned}$$

3. D'après la question 2, le produit vaut $100 \times a(a+1) + b(10-b)$. Pour b allant de 1 à 9, le nombre $b(10-b)$ prend les valeurs 9, 16, 21, 24, 25, 24, 21, 16, 9 : il est au plus égal à 25, donc il s'écrit avec deux chiffres au plus. Ajouter $100 \times a(a+1)$ revient alors à écrire $a(a+1)$ devant les deux chiffres de $b(10-b)$: c'est exactement la règle de la question 1.

$$74 \times 76 = 100 \times 7 \times 8 + 4 \times 6$$

$$= 100 \times 56 + 24$$

$$= \boxed{5\,624}$$

$$91 \times 99 = 100 \times 9 \times 10 + 1 \times 9$$

$$= 100 \times 90 + 9$$

$$= \boxed{9\,009}$$

Mentalement : $7 \times 8 = 56$ suivi de 24 donne 5 624 ; $9 \times 10 = 90$ suivi de 09 donne 9 009.

4. Le calcul de la question 2 n'utilise jamais le fait que a est un chiffre : il reste vrai pour tout entier a , dès que les facteurs s'écrivent $10a + b$ et $10a + 10 - b$. Ici $123 = 10 \times 12 + 3$ et $127 = 10 \times 12 + 7$: on prend $a = 12$ (le nombre de dizaines) et $b = 3$, avec $10 - b = 7$.

$$123 \times 127 = 100 \times 12 \times 13 + 3 \times 7$$

$$= 100 \times 156 + 21$$

$$= \boxed{15\,621}$$

Oui, la règle s'applique, avec le nombre de dizaines à la place du chiffre des dizaines : $12 \times 13 = 156$ suivi de 21 donne 15 621.

Coups de pouce à distribuer

- « Compare les chiffres des dizaines des deux facteurs, puis la somme de leurs chiffres des unités. »
- « Si le premier facteur est $10a + b$, comment s'écrit le second ? »
- « Développe avec la double distributivité, puis regroupe les termes en 100. »
- « Pourquoi $b(10-b)$ s'écrit-il toujours avec deux chiffres au plus ? Calcule-le pour b allant de 1 à 9. »