

Puissances, racines carrées et fractions

1 Fractions

Propriété 1 : fractions égales, opérations sur les fractions

Pour tous réels a, b, c, d et k avec b, d et k **non nuls** (et $c \neq 0$ pour la division) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Méthode : additionner deux fractions

- ❶ Choisir un dénominateur commun.
- ❷ L'obtenir en multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre non nul.
- ❸ Additionner les numérateurs.

Exemple

$$A = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} - \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{4}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{4 \times 3}{9 \times 10} = \frac{12}{90} = \frac{2 \times 6}{15 \times 6} = \frac{2}{15}$$

Définition 1 : valeur interdite

Une valeur de x qui annule un dénominateur est une **valeur interdite** : l'expression n'y est pas définie.

Exemple

Les valeurs interdites de $\frac{3}{x(x-4)}$ sont 0 et 4 : le dénominateur $x(x-4)$ est nul pour $x = 0$ ou pour $x - 4 = 0$.

Capacité 1 : Calculer avec des fractions

Calculer sous forme d'une fraction irréductible (1 à 3) ; indiquer les valeurs interdites, puis écrire sous la forme d'une seule fraction (4 à 6).

1. $A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$

2. $B = \frac{7}{3} - \frac{5}{4} \times \frac{2}{15}$

3. $C = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}}$

4. $D = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x}$

5. $E = 1 - \frac{4}{x-5}$

6. $F = \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x+3}$

2 Puissances

Définition 2 : puissance d'un nombre

Soient a un réel et n un entier naturel non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

et, si $a \neq 0$: $a^0 = 1$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple

$$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27; \quad 5^0 = 1; \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Propriété 2 : règles de calcul

Pour tous réels a et b non nuls et tous entiers relatifs n et m :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Démonstration : pourquoi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$



Exemple

$$7^3 \times 7^{-5} = 7^{3+(-5)} = 7^{-2}; \quad \frac{2^9}{2^4} = 2^{9-4} = 2^5;$$
$$(5^2)^{-3} = 5^{2 \times (-3)} = 5^{-6}; \quad 2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3.$$

Capacité 2 : Effectuer des calculs sur les puissances

Calculer (résultat sous la forme d'un entier ou d'une fraction).

1. $A = (-2)^4$

2. $B = -2^4$

3. $C = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

4. $D = 3^4 \times 3^{-6}$

5. $E = \frac{5^7}{5^4}$

6. $F = (2^3)^2 \times 2$

7. $G = \frac{4^5 \times 25^5}{100^4}$

8. $H = \frac{(2^{-3})^2}{2^{-8}}$

9. $I = \frac{7^{-3} \times 7^5}{7^4}$

3 Racines carrées

Définition 3 : racine carrée, carré parfait

Soit a un réel **positif**. Sa **racine carrée** $\sqrt{a}$ est le nombre **positif** dont le carré est a :

$$\boxed{\sqrt{a} \geq 0}$$

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$$

Un **carré parfait** est le carré d'un entier naturel : 0, 1, 4, 9, 16...

Exemple

$\sqrt{49} = 7$, car $7 \geq 0$ et $7^2 = 49$; $\sqrt{0,09} = 0,3$, car $0,3 \geq 0$ et $0,3^2 = 0,09$; $(\sqrt{7})^2 = 7$.

$\sqrt{-4}$ n'existe pas : un carré n'est jamais strictement négatif.

Propriété 3 : racine carrée d'un carré, d'un produit, d'un quotient

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b > 0$:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = a}$$

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Remarque Pas de formule pour une somme : $\sqrt{9+16} = 5$, mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Exemple

$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$.

Démonstration : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$

■

Méthode : calculer avec des racines carrées

- **Extraire un carré parfait** : écrire $n = k^2 \times m$, où k^2 est le plus grand carré parfait qui divise l'entier n ; alors $\sqrt{n} = k\sqrt{m}$.
- **Réduire** : regrouper les multiples d'une même racine.
- **Développer** : traiter $\sqrt{a}$ comme une lettre, puis remplacer $(\sqrt{a})^2$ par a .

Exemple

36 est le plus grand carré parfait qui divise 72 : $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Développement : $\sqrt{2}(3 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \times 3 - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2$.

Capacité 3 : Simplifier et réduire des racines carrées

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec b le plus petit possible (1 à 3), puis le plus simplement possible (4 à 6).

1. $A = \sqrt{50}$

2. $B = \sqrt{48}$

3. $C = 3\sqrt{45}$

4. $D = \sqrt{20} + 3\sqrt{5} - \sqrt{45}$

5. $E = 2\sqrt{27} - \sqrt{75} + \sqrt{12}$

6. $F = 3\sqrt{2} - (5 - \sqrt{2})$

Capacité 4 : Développer une expression contenant des racines carrées

Développer et réduire.

1. $A = (\sqrt{3} + 4)^2$

2. $B = (2\sqrt{5} - 1)^2$

3. $C = (\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)$