

CHAPITRE 1

Second degré, révisions

1 Définition

Définition 1 : fonction polynôme du second degré

Une **fonction polynôme du second degré**, aussi appelée **fonction trinôme**, est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on peut trouver trois réels a , b et c , avec $a \neq 0$, tels que

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette écriture de $f(x)$ porte le nom de **forme développée ordonnée**.

Les réels a , b et c en sont les **coefficients**.

Dans un repère, la courbe représentative d'une telle fonction est une **parabole**.

Exemple

$f : x \mapsto 2(x-1)^2 + 3$ est une fonction trinôme : $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, donc $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$.
 $g : x \mapsto (x+1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction trinôme : $g(x) = 2x + 1$ est affine.

Capacité 1 : Déterminer les coefficients d'un trinôme

Pour chacune des fonctions trinômes ci-dessous, écrire sa forme développée ordonnée, puis identifier les coefficients a , b et c .

1. $f : x \mapsto 3x - 4x^2 + 5$ 2. $f : x \mapsto (2x - 1)^2$ 3. $f : x \mapsto (3x - 1)(1 - x)$

2 Racines d'un trinôme

Définition 2 : racines

Soit f une fonction trinôme.

On appelle **racines** de f les antécédents de 0 par f , lorsqu'ils existent.

Ce sont exactement les solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple

2 est une racine du trinôme $f : x \mapsto x^2 + x - 6 : f(2) = 4 + 2 - 6 = 0$.
-1 n'en est pas une : $f(-1) = 1 - 1 - 6 = -6 \neq 0$.

Propriété 1 : règle du produit nul

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \text{ si et seulement si } A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemple

Racines du trinôme $f : x \mapsto 3x^2 - 6x : 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff 3x = 0 \text{ ou } x-2 = 0$.
Les racines de f sont 0 et 2.

Capacité 2 : Déterminer les racines d'un trinôme par la règle du produit nul

Déterminer, à l'aide de la règle du produit nul, les racines des trinômes suivants :

1. $f : x \mapsto (2x - 1)(x + 3)$ 2. $g : x \mapsto (3x + 1)^2$ 3. $h : x \mapsto x^2 - 4$

3 Théorème des racines d'un trinôme

Théorème 1 : racines et discriminant

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée ordonnée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le nombre de racines de f , c'est-à-dire le nombre de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, ne dépend que du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.
Trois cas se présentent :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racine(s) réelle(s) de f	Aucune racine réelle	Une unique racine réelle : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Remarque Dès que $\Delta \geq 0$, le trinôme admet une forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1 = x_2$ lorsque la racine est double. C'est en général de cette écriture que part l'étude du signe.

Exemple

$f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1 : \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$, donc f a deux racines réelles distinctes :
 $x_1 = \frac{3-1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+1}{2 \times 2} = 1$, d'où la forme factorisée $f(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$.

Capacité 3 : Déterminer les racines d'un trinôme

Appliquer le théorème précédent pour déterminer les racines des trinômes suivants :

1. $f : x \mapsto x^2 - x - 1$

3. $h : x \mapsto x^2 - 2x + 1$

2. $g : x \mapsto x^2 + x + 1$

4. $k : x \mapsto -3x^2 - 11x + 4$

4 Théorème du signe d'un trinôme

Théorème 2 : signe d'un trinôme

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée ordonnée $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Lorsque f n'admet aucune racine, $f(x)$ garde le signe de a sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Dans le cas contraire, $f(x)$ est du *signe de a à l'extérieur des racines* et du *signe opposé à celui de a entre les racines* (intervalle éventuellement vide lorsque la racine est double).

Exemple

$f : x \mapsto x^2 - 4x + 3 : \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$, racines $x_1 = \frac{4-2}{2 \times 1} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2 \times 1} = 3$;
 $a = 1 > 0$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $]1; 3[$.

Capacité 4 : Utiliser le théorème du signe d'un trinôme

1. Chaque tableau ci-dessous est le tableau de signes d'un trinôme de forme développée ordonnée $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dans chaque cas, donner le signe de a et celui du discriminant Δ .

a. Trinôme f .

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. Trinôme g .

x	$-\infty$	2	10	$+\infty$	
$g(x)$	+	0	-	0	+

c. Trinôme h .

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$h(x)$	+	0	+

d. Trinôme k .

x	$-\infty$	$+\infty$
$k(x)$	—	

2. Déterminer les racines du trinôme $T : x \mapsto -x^2 + x + 2$, puis dresser son tableau de signes.