

1 Suite numérique

Définition 1 : suite numérique

Une **suite** est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou, de manière plus usuelle, u_n (notation indicielle).

L'ensemble des termes de la suite se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'entier n est le **rang** et le réel u_n le **terme de rang n** .

Propriété 1 : deux modes de génération

Une suite peut être définie :

- **explicitement** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, où f est une fonction. On calcule alors n'importe quel terme sans calculer les précédents ;
- **par récurrence** : on donne u_0 et une relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Chaque terme se calcule à partir du précédent.

Exemple

Définition explicite, $u_n = 3n^2 - 1$: $u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = 11$ et $u_{10} = 3 \times 10^2 - 1 = 299$.

Définition par récurrence, $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = 2v_n - 3$: $v_1 = 2 \times 5 - 3 = 7, v_2 = 2 \times 7 - 3 = 11, v_3 = 2 \times 11 - 3 = 19$.

v_{10} ne s'obtient qu'après tous les termes de v_4 à v_9 .

Définition 2 : sens de variation

Soit (u_n) une suite et p un entier naturel.

- (u_n) est **croissante** à partir du rang p si $\forall n \geq p, u_n \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si $\forall n \geq p, u_n \geq u_{n+1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- (u_n) est **constante** à partir du rang p si $\forall n \geq p, u_{n+1} = u_n$.

Exemple

$u_n = n^2 + 4$: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 4 - (n^2 + 4) = 2n + 1 > 0$, donc (u_n) est croissante.

$v_n = \frac{1}{n+1}$: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$, donc (v_n) est décroissante.

$w_n = (-2)^n$: $w_{n+1} - w_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n = -2 \times (-2)^n - (-2)^n = -3 \times (-2)^n$ change de signe d'un rang au suivant, donc (w_n) n'est ni croissante ni décroissante.

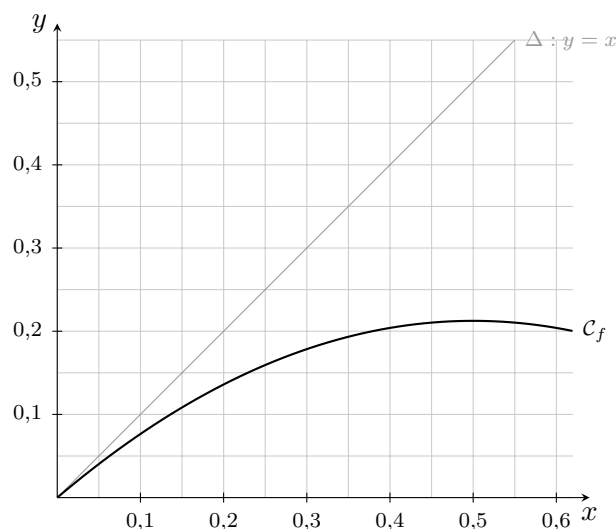
Capacité 1 : Modéliser une situation par une suite

On s'intéresse à une population de phoques vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante. Au début de l'an 2000, on comptait 500 phoques. Une étude a permis de modéliser ce nombre par la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0,5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0,85 u_n (1 - u_n),$$

où u_n modélise le nombre de phoques, en milliers, au début de l'année $2000 + n$. Dans les calculs, on arrondira les nombres de phoques à l'unité.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de phoques au début de l'année 2001, puis de l'année 2002.
2. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 0,85 x (1 - x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Construire les quatre premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en appliquant l'algorithme suivant :
 - étape 1 : on place $u_0 = 0,5$ sur l'axe des abscisses ;
 - étape 2 : on construit l'ordonnée $u_1 = f(u_0)$ du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 , on la reporte sur l'axe des abscisses grâce à la droite Δ , puis on reprend l'étape 1 avec u_1 .



3.
 - a. Calculer des valeurs approchées des dix premiers termes de la suite avec le mode suite de la calculatrice.
 - b. On reporte les premiers termes dans une feuille de tableur, les rangs en colonne A et les termes en colonne B, la première ligne servant d'en-tête. Quelles formules saisir en A3 et en B3 pour compléter la feuille de calcul ?
4. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et sur les valeurs prises par u_n lorsque n devient très grand ? En donner une interprétation dans le contexte.

2 Suites arithmétiques et géométriques

Remarque Les démonstrations des propriétés de cette partie ont été faites en classe de Première.

2.1 Suites arithmétiques

Définition 3 : suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite.

Propriété 2 : expression explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad u_p = u_q + (p - q) \times r.$$

Exemple

Suite définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 2$: elle est arithmétique de raison -2 .

Donc $u_n = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$ et $u_{20} = 7 - 2 \times 20 = -33$.

Théorème 1 : caractérisation

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe un réel a tel que

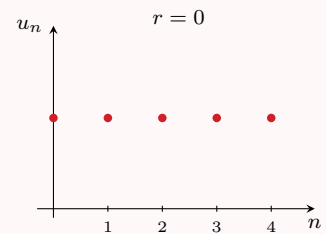
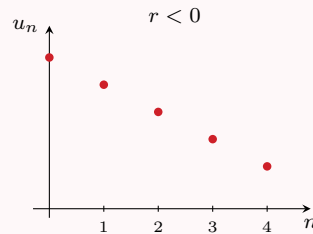
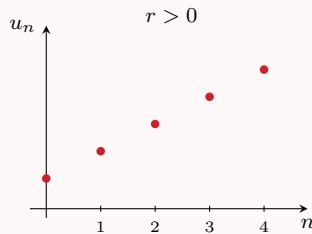
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + n r.$$

Autrement dit, une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.

Propriété 3 : sens de variation

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.



Exemple

$v_n = 4 - 3n = 4 + n \times (-3)$: (v_n) est arithmétique de raison $-3 < 0$, donc strictement décroissante.

Propriété 4 : somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite arithmétique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

En particulier : $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

Application : somme des 100 premiers entiers naturels non nuls

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Capacité 2 : Étudier une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite arithmétique de raison 4 telle que $u_5 = 30$.

1. Calculer u_{10} .
2. Soit un entier $n \geq 1$. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Soit un entier $n \geq 1$. Exprimer la somme $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n .

4. Existe-t-il un entier naturel n tel que $s_n = 1\,200$?

2.2 Suites géométriques

Définition 4 : suite géométrique

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

Propriété 5 : expression explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_m = u_p \times q^{m-p}.$$

Exemple

Suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n$: elle est géométrique de raison 3, donc $u_n = 5 \times 3^n$ et $u_4 = 5 \times 3^4 = 5 \times 81 = 405$.

Propriété 6 : somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

$$\text{En particulier : } \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemple

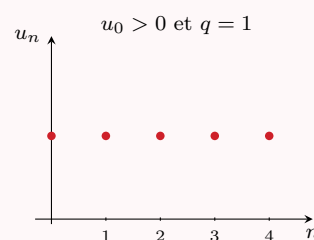
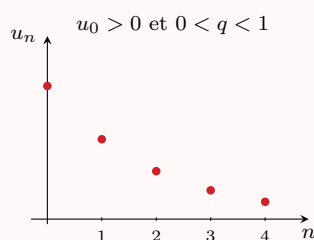
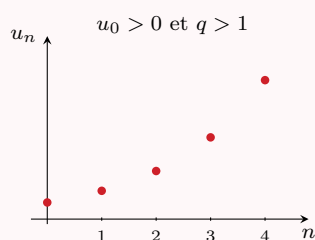
$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$ est la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 : $S = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$.

Propriété 7 : sens de variation

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.

Si $u_0 < 0$, les sens de variation sont inversés.



Exemple

$u_n = -2 \times 3^n$: $q = 3 > 1$ et $u_0 = -2 < 0$ (sens inversé), donc (u_n) est strictement décroissante.

Capacité 3 : Étudier le sens de variation d'une suite géométrique

Dans chaque cas, u désigne une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par l'expression de son terme général. Déterminer la raison de u et son sens de variation.

1. $u_n = 0,4 \times 1,5^n$

3. $u_n = 3^{1-n}$

2. $u_n = 4 \times 0,5^n$

4. $u_n = \frac{(-2^n)^3}{(2^2)^n}$

Capacité 4 : Étudier une suite géométrique

Un globe-trotter a pour objectif de parcourir 200 km à pied. Il peut parcourir 40 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 3 % chaque nouvelle

journée. On note D_n la distance parcourue durant le n -ième jour. Le premier jour, il parcourt donc $D_1 = 40$ km.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.
2. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n . En déduire que (D_n) est géométrique et préciser sa raison.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer l'expression de D_n en fonction de n .
4. Déterminer, en fonction de n , la distance totale $T_n = D_1 + D_2 + \dots + D_n$ parcourue au bout de n jours.
5. Réaliser un tableau de valeurs de T_n avec le mode suite de la calculatrice et en déduire le nombre de jours nécessaires pour atteindre l'objectif.

3 Suites arithmético-géométriques

Définition 5 : suite arithmético-géométrique

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b,$$

où a et b sont deux réels fixés.

Remarque : cas particuliers

- Si $a = 0$, la suite est constante à partir du rang 1.
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b .
- Si $b = 0$, la suite est géométrique de raison a .

Propriété 8 : point fixe et suite auxiliaire géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n + b$, où a et b sont des réels avec $a \neq 1$.

1. L'équation $x = a x + b$ d'inconnue x admet une unique solution α , appelée **point fixe** :

$$\alpha = \frac{b}{1-a}$$

2. La suite auxiliaire (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$, est géométrique de raison a .

Démonstration

1. L'équation $x = a x + b$ équivaut à $(1-a)x = b$. Comme $a \neq 1$, elle admet l'unique solution $x = b/(1-a)$, notée α .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\alpha = a \alpha + b$, on a $b = \alpha - a \alpha$. Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha \\ &= a u_n + b - \alpha \\ &= a u_n + \alpha - a \alpha - \alpha \\ &= a u_n - a \alpha \\ &= a (u_n - \alpha) \\ &= a v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a , de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha$. ■

Méthode : suite arithmético-géométrique

Pour trouver la formule explicite d'une suite définie par $u_{n+1} = a u_n + b$:

1. On résout l'équation $x = a x + b$ d'inconnue x . On trouve une solution α .
2. On pose une suite auxiliaire $v_n = u_n - \alpha$. Cette suite est géométrique.
3. On détermine v_0 et on cherche la raison de (v_n) en écrivant $v_{n+1} = \dots$
4. On écrit la formule explicite pour v_n .
5. On écrit la formule explicite pour $u_n = v_n + \alpha$.

Exemple

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$: le point fixe, solution de $x = 2x - 3$, est $\alpha = \frac{-3}{1-2} = 3$.

$v_n = u_n - 3$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n$ et $v_0 = 5 - 3 = 2$.

(v_n) est géométrique de raison 2 : $v_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

Ainsi $u_n = v_n + 3 = 2^{n+1} + 3$ et $u_{10} = 2^{11} + 3 = 2048 + 3 = 2051$.