

Chapitre 2 : suites arithmético-géométriques (corrigé)

► Exercice n°1 Une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 280$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 42$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Déterminer le point fixe α de la relation de récurrence, c'est-à-dire la solution de l'équation $x = 0,9 x + 42$.
3. On considère la suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - \alpha$.
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - c) Donner une expression explicite de v_n en fonction de n .
 - d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 420 - 140 \times 0,9^n$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $u_n > 419$.
5. Existe-t-il un entier n tel que $u_n \geq 420$?
6. Conjecturer la valeur dont u_n se rapproche lorsque n devient grand.

Correction.

1. $u_1 = 0,9 \times 280 + 42 = 252 + 42 = \boxed{294}$ et $u_2 = 0,9 \times 294 + 42 = 264,6 + 42 = \boxed{306,6}$.
2. L'équation $x = 0,9 x + 42$ équivaut à $0,1 x = 42$, donc $\alpha = \boxed{420}$.
3.
 - a) $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = \boxed{-140}$.
 - b) Pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0,9 u_n + 42 - 420 = 0,9 u_n - 378$$
$$= 0,9 (u_n - 420) = 0,9 v_n$$
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,9.
 - c) $v_n = v_0 \times 0,9^n$, soit $v_n = -140 \times 0,9^n$.
 - d) $u_n = v_n + \alpha$, d'où $u_n = 420 - 140 \times 0,9^n$.
4. $u_n > 419$ équivaut à $-140 \times 0,9^n > -1$, soit à $0,9^n < \frac{1}{140}$ (on divise par $-140 < 0$: l'inégalité change de sens). À la calculatrice, $u_{46} \approx 418,90$ et

$u_{47} \approx 419,01$: le plus petit entier est $n = 47$.

5. $0,9^n > 0$, donc $u_n = 420 - 140 \times 0,9^n < 420$ pour tout entier n : non.
6. Les termes se rapprochent du point fixe : on conjecture que u_n se rapproche de 420.

► Exercice n°2 Location de voitures

Une commune dispose de 380 voitures qu'elle loue chacune pour un mois entier, du 1^{er} au dernier jour du mois ; le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois. À la fin de janvier 2026, 280 voitures ont été louées. Pour étudier l'évolution du nombre de locations, le responsable modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où u_n est le nombre de voitures louées le n -ième mois après janvier 2026 ; ainsi $u_0 = 280$. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité $u_{n+1} = 0,9 u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système au mois de février 2026 ?
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 420$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme -140 , c'est-à-dire que c'est exactement la suite (v_n) de l'exercice 1.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
 - c) Existe-t-il un entier naturel n tel que $u_n \geq 421$? Justifier.
3. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. À partir de quelle date le nombre de voitures initial sera-t-il insuffisant ? Expliciter la démarche.

Correction.

1. $u_1 = 0,9 \times 280 + 42 = \boxed{294}$ voitures louées en février 2026.
2.
 - a) $v_0 = u_0 - 420 = 280 - 420 = -140$ et, pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0,9 u_n + 42 - 420 = 0,9 u_n - 378$$
$$= 0,9 (u_n - 420) = 0,9 v_n$$
La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme -140 : c'est la suite de l'exercice 1.
 - b) $v_n = -140 \times 0,9^n$ et $u_n = v_n + 420$, d'où $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
 - c) $u_n \geq 421$ équivaut à $-140 \times 0,9^n \geq 1$, impossible car $-140 \times 0,9^n < 0$: non.
3. Le nombre de voitures est insuffisant lorsque $u_n > 380$, soit $-140 \times 0,9^n + 420 >$

380, c'est-à-dire $0,9^n < \frac{40}{140} = \frac{2}{7} \approx 0,286$ (on divise par $-140 < 0$). À la calculatrice, $0,9^{11} \approx 0,314$ et $0,9^{12} \approx 0,282$: dès $n = 12$, soit à partir de janvier 2027.