

Chapitre 2 : suites arithmético-géométriques

► Exercice n°1 Une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 280$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Déterminer le point fixe α de la relation de récurrence, c'est-à-dire la solution de l'équation $x = 0,9x + 42$.
3. On considère la suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - \alpha$.
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - c) Donner une expression explicite de v_n en fonction de n .
 - d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 420 - 140 \times 0,9^n$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $u_n > 419$.
5. Existe-t-il un entier n tel que $u_n \geq 420$?
6. Conjecturer la valeur dont u_n se rapproche lorsque n devient grand.

► Exercice n°2 Location de voitures

Une commune dispose de 380 voitures qu'elle loue chacune pour un mois entier, du 1^{er} au dernier jour du mois ; le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois. À la fin de janvier 2026, 280 voitures ont été louées. Pour étudier l'évolution du nombre de locations, le responsable modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où u_n est le nombre de voitures louées le n -ième mois après janvier 2026 ; ainsi $u_0 = 280$. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système au mois de février 2026 ?
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 420$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme -140 , c'est-à-dire que c'est exactement la suite (v_n) de l'exercice 1.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
 - c) Existe-t-il un entier naturel n tel que $u_n \geq 421$? Justifier.
3. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. À partir de quelle date le nombre de voitures initial sera-t-il insuffisant ? Expliciter la démarche.

Chapitre 2 : suites arithmético-géométriques

► Exercice n°1 Une suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 280$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Déterminer le point fixe α de la relation de récurrence, c'est-à-dire la solution de l'équation $x = 0,9x + 42$.
3. On considère la suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - \alpha$.
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
 - c) Donner une expression explicite de v_n en fonction de n .
 - d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 420 - 140 \times 0,9^n$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $u_n > 419$.
5. Existe-t-il un entier n tel que $u_n \geq 420$?
6. Conjecturer la valeur dont u_n se rapproche lorsque n devient grand.

► Exercice n°2 Location de voitures

Une commune dispose de 380 voitures qu'elle loue chacune pour un mois entier, du 1^{er} au dernier jour du mois ; le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois. À la fin de janvier 2026, 280 voitures ont été louées. Pour étudier l'évolution du nombre de locations, le responsable modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où u_n est le nombre de voitures louées le n -ième mois après janvier 2026 ; ainsi $u_0 = 280$. On admet que cette modélisation conduit à l'égalité $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système au mois de février 2026 ?
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 420$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme -140 , c'est-à-dire que c'est exactement la suite (v_n) de l'exercice 1.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
 - c) Existe-t-il un entier naturel n tel que $u_n \geq 421$? Justifier.
3. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. À partir de quelle date le nombre de voitures initial sera-t-il insuffisant ? Expliciter la démarche.