

Devoir en temps libre n° 1

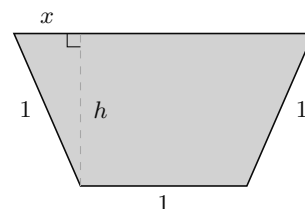
Nom : Prénom :

À rendre le jeudi 15 octobre

La copie devra être rédigée avec soin : chaque résultat doit être justifié. Binômes autorisés.

Exercice 1 : Gouttière de section maximale

Pour évacuer l'eau de pluie d'un toit, un zingueur fabrique une gouttière à partir d'une bande de tôle de 30 cm de large, qu'il plie en trois parties égales : le fond et deux côtés qui s'évasent symétriquement. La section de la gouttière est un trapèze isocèle. On exprime les longueurs en décimètres : le fond et chacun des côtés mesurent 1 dm.



On note x le décalage horizontal de chaque côté, avec $x \in [0; 1[$, et h la hauteur de la gouttière (voir figure). On note $f(x)$ l'aire, en dm^2 , de la section : plus elle est grande, plus la gouttière évacue d'eau. Ce type de recherche d'un maximum est courant dans le bâtiment, l'architecture et l'ingénierie.

1. Justifier que $h = \sqrt{1 - x^2}$.
2. En déduire que $f(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$.
3. On admet que f est dérivable sur $[0; 1[$.
 - a. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1[$, $f'(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
 - b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^2 - x + 1 = 0$.
 - c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; 1[$.
 - d. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 1[$, puis donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire maximale de la section, ainsi que la valeur de x correspondante.
4. La gouttière mesure 4 m de long. On rappelle que $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$.
 - a. Calculer le volume d'eau maximal, en litres, que peut contenir la gouttière.
 - b. Le cas $x = 0$ correspond à une gouttière de section rectangulaire. De quel pourcentage environ le volume maximal précédent dépasse-t-il celui de cette gouttière ?

Exercice 2 : Recherche

On considère les fonctions f , g et k définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$, $g(x) = x|x|$ et $k(x) = \sqrt{|x|}$.

1. Tracer leurs courbes avec un logiciel, puis les représenter à main levée sur la copie. Lesquelles de ces fonctions semblent dérivables en 0 ?
2. Pour chacune, étudier le taux d'accroissement entre 0 et h , pour $h > 0$ puis pour $h < 0$. Conclure : la fonction est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut son nombre dérivé en 0 ?
3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$: exprimer $g'(x)$ pour tout réel x . La fonction g' est-elle dérivable en 0 ?

Toute piste est valorisée, même incomplète : écrire les essais sur la copie.